

## Práctica 7

### Determinantes

#### Definiciones y propiedades

El *determinante* de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es un número real que se calcula a partir de los elementos de  $A$ . Se nota  $\det(A)$  ó  $|A|$ .

Si  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , el determinante de  $A$  es el número

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Si  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Los determinantes de matrices de  $4 \times 4$  se calculan utilizando determinantes de matrices de  $3 \times 3$ , y, en general, los determinantes de matrices de  $n \times n$  se calculan utilizando determinantes de matrices de  $(n-1) \times (n-1)$ .

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A = (a_{ij})$ , el *menor del elemento*  $a_{ij}$ , que se nota  $M_{ij}$ , se define como el determinante de la submatriz que queda al eliminar de  $A$  la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna. El número  $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$  se conoce como *cofactor del elemento*  $a_{ij}$ .

Se define el determinante de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como

$$\det(A) = |A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n}.$$

*Propiedad.* Se puede obtener  $\det(A)$  multiplicando los elementos de cualquier fila (o columna) por sus respectivos cofactores y sumando los productos que resulten. Es decir, para cada  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la  $j$ -ésima columna) y

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la  $i$ -ésima fila).

*Propiedades.*

- Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  contiene una fila de ceros, entonces  $\det(A) = 0$ .
- Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz triangular, entonces  $\det(A)$  es el producto de los elementos de la diagonal, es decir  $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .
- Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $A^t$  es la matriz transpuesta de  $A$ , entonces  $\det(A^t) = \det(A)$ .

*Propiedades.* Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- Si  $A'$  es la matriz que se obtiene cuando una sola fila de  $A$  se multiplica por una constante  $k$ , entonces  $\det(A') = k\det(A)$ .
- Si  $A'$  es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de  $A$ , entonces  $\det(A') = -\det(A)$ .
- Si  $A'$  es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una de las filas de  $A$  a otra fila, entonces  $\det(A') = \det(A)$ .

*Propiedades.*

- Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $k \in \mathbb{R}$ , entonces
 
$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es inversible si, y solo si,  $\det(A) \neq 0$ . En el caso de que  $A$  sea inversible vale
 
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

### Interpretación geométrica del determinante

Si  $O = (0,0)$ ,  $P = (p_1, p_2)$ ,  $Q = (q_1, q_2)$  son tres puntos en  $\mathbb{R}^2$ , el área del paralelogramo determinado por  $\vec{OP}$  y  $\vec{OQ}$  es

$$\left| \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Dados en  $\mathbb{R}^3$  los puntos  $O = (0,0,0)$ ,  $P = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $Q = (q_1, q_2, q_3)$  y  $R = (r_1, r_2, r_3)$ , el volumen del paralelepípedo determinado por  $\vec{OP}$ ,  $\vec{OQ}$  y  $\vec{OR}$  es

$$\left| \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \right| = |(\vec{OP} \times \vec{OQ}) \cdot \vec{OR}|$$

## Ejercicios

**Ejercicio 1.** Calcular los siguientes determinantes

$$a) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 2.** Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por las filas y columnas indicadas:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

por tercera fila;  
por primera columna.

$$b) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

por primera fila;  
por segunda fila;  
por cuarta columna;  
por tercera columna.

**Ejercicio 3.** Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por la fila o columna más conveniente.

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 4.** Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando propiedades.

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 5.** Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Calcular  $\det(A)$ ,  $\det(B)$ ,  $\det(A^t)$ ,  $\det(AB)$ ,  $\det(A+B)$ ,  $\det(A^{10})$  y  $\det(A^5B - A^5)$ .

**Ejercicio 6.**

a) Determinar todos valores de  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales la matriz  $A$  no es inversible.

▪  $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$

▪  $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 2k \end{pmatrix}$

▪  $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$

▪  $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ k^2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Determinar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales la matriz  $A$  es inversible.

▪  $A = \begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix}$

▪  $A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

▪  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 7.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$ . Encontrar todos los valores de  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales el sistema  $Ax = 2x$  admite solución no trivial.

**Ejercicio 8.** Si  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $\det(A) = 15$ , calcular

a)  $\det(2A)$

b)  $\det((3A)^{-1})$

c)  $\det(3A^{-1})$

**Ejercicio 9.** En cada caso, calcular el área del paralelogramo determinado por  $\vec{OP}$  y  $\vec{OQ}$ .

a)  $O = (0,0)$ ,  $P = (1,-2)$ ,  $Q = (3,2)$ .

b)  $O = (0,0)$ ,  $P = 2(1,-2)$ ,  $Q = 2(3,2)$ .

**Ejercicio 10.** Sean  $\mathbf{u} = (1,1,2)$ ,  $\mathbf{v} = (4,2,1)$  y  $\mathbf{w} = (3,1,1)$ .

a) Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ .

b) Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , calcular  $\det(A)$  y el volumen del paralelepípedo determinado por  $A\mathbf{u}$ ,  $A\mathbf{v}$  y  $A\mathbf{w}$ . ¿Qué se puede concluir?

**Ejercicios surtidos**

1. Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $\det(AB) = 2$ . Calcular  $\det(B^{-1})$ .

2. Sean  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $\det(B) = -3$ .

Hallar todas las soluciones del sistema  $(BA)\mathbf{x} = -B\mathbf{x}$ .

3. Sea  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Decidir para qué valores de  $a \in \mathbb{R}$  el sistema  $(A^2 + 2A)\mathbf{x} = 0$  tiene solución no trivial.

4. Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Hallar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  tales que  $\det(BA^{-1}) = \det\left(\frac{1}{4}BA\right)$ .