

PRÁCTICA 5

TRANSFORMACIONES LINEALES

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . Una *transformación lineal* $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una función que satisface las siguientes dos propiedades:

$$\text{TL1: Si } \mathbf{u} \in \mathbb{V} \text{ y } \mathbf{v} \in \mathbb{V}, f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$

$$\text{TL2: Si } k \in \mathbb{R} \text{ y } \mathbf{u} \in \mathbb{V}, f(k\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u})$$

Son transformaciones lineales:

La función nula $0: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ dada por $0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

La función identidad $\text{id}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, dada por $\text{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

Propiedades: Cualquier transformación lineal $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ satisface:

$$\text{a) } f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$\text{b) } f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}) \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{V}$$

$$\text{c) } f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) \quad \text{para todos } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{w} \in \mathbb{V}$$

$$\text{d) } f(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1f(\mathbf{v}_1) + a_2f(\mathbf{v}_2) + \dots + a_nf(\mathbf{v}_n) \quad \text{para todos } a_i \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_i \in \mathbb{V}$$

Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$, $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$, $\mathbb{T} \subset \mathbb{W}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$, notamos:

$$f(\mathbb{S}) = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{W} / \mathbf{w} = f(\mathbf{s}), \text{ con } \mathbf{s} \in \mathbb{S} \}$$

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{V} / f(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \}$$

$$f^{-1}(\mathbb{T}) = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{V} / f(\mathbf{v}) \in \mathbb{T} \}$$

Propiedades:

Si \mathbb{S} es subespacio de \mathbb{V} , entonces $f(\mathbb{S})$ es subespacio de \mathbb{W} .

Si \mathbb{T} es subespacio de \mathbb{W} , entonces $f^{-1}(\mathbb{T})$ es subespacio de \mathbb{V} .

Teorema. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de \mathbb{V} , y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ son vectores (no necesariamente distintos) en \mathbb{W} , entonces hay una única transformación lineal $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ tal que $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \dots, f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.

Este teorema nos dice que una transformación lineal está completamente determinada por los valores que toma en una base.

Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, llamamos:

- *núcleo* de f al conjunto $\text{Nu } f = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} / f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$
- *imagen* de f al conjunto $\text{Im } f = \{\mathbf{w} \in \mathbb{W} / \mathbf{w} = f(\mathbf{v}), \text{ con } \mathbf{v} \in \mathbb{V}\}$

Observación: $\text{Im } f = f(\mathbb{V})$.

Propiedades: Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces:

- a) $\text{Nu } f$ es un subespacio de \mathbb{V} .
- b) $\text{Im } f$ es un subespacio de \mathbb{W} .
- c) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de generadores de \mathbb{V} , entonces $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ es un conjunto de generadores de $\text{Im } f$.
- d) Si $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_r)\}$ es linealmente independiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente.

Decimos que una transformación lineal $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es:

- *monomorfismo* si es inyectiva, esto es, si verifica " $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$ ".
- *epimorfismo* si es suryectiva, esto es, si $\text{Im } f = \mathbb{W}$.
- *isomorfismo* si es biyectiva, es decir, si es monomorfismo y epimorfismo.

Propiedades: Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces:

- a) f es monomorfismo $\Leftrightarrow \text{Nu } f = \{\mathbf{0}\}$.

b) Si f es monomorfismo y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente, entonces $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_r)\}$ es linealmente independiente.

c) f es isomorfismo si y sólo si: “Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es base de \mathbb{V} , entonces $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ es base de \mathbb{W} ”.

Teorema de la dimensión

Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces

$$\dim \mathbb{V} = \dim \text{Nu } f + \dim \text{Im } f$$

Propiedades:

Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y $g: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$ son transformaciones lineales, la composición $g \circ f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$, dada por $(g \circ f)(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{v}))$, es transformación lineal.

Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es isomorfismo, la función inversa $f^{-1}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$, que cumple $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{W}}$ y $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{V}}$, es isomorfismo.

Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y $g: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$ son isomorfismos, $g \circ f$ es isomorfismo y se verifica:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Una transformación lineal $p: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es un *proyector* si $p \circ p = p$.

Propiedad: Si $p: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es un proyector, entonces

- $\mathbb{V} = \text{Nu } p \oplus \text{Im } p$
- Para todo $\mathbf{v} \in \text{Im } p$, $p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$

Dada la transformación lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, existe una única matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que f puede escribirse en la forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Esta matriz A tal que $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ se denomina *matriz de la transformación lineal* f , y escribimos $A = M(f)$.

Propiedad: Las columnas de $M(f)$ son un conjunto de generadores de $\text{Im } f$.

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

el *rango columna* de A es la dimensión del subespacio generado por las columnas de A ;

el *rango fila* de A es la dimensión del subespacio generado por las filas de A .

Teorema: Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces

$$\text{rango fila de } A = \text{rango columna de } A$$

Esta igualdad nos permite hablar de rango de A , que notaremos $\text{rg } A$.

Propiedad: $\dim \text{Im } f = \text{rg } M(f)$.

Teorema: Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la dimensión del subespacio de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $n - \text{rg } A$.

Sean $B = \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \}$ base de un espacio vectorial \mathbb{V} de dimensión n y $B' = \{ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \}$ base de un espacio vectorial \mathbb{W} de dimensión m .

Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal y $f(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + \dots + a_{mj}\mathbf{w}_m$, $1 \leq j \leq n$,

llamamos *matriz asociada a f* en las bases B y B' , a la matriz de $m \times n$:

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notar que en la columna j de $M_{BB'}(f)$ están las coordenadas de $f(\mathbf{v}_j)$ en base B' .

La matriz $M_{BB'}(f)$ es tal que si $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $M_{BB'}(f)(\mathbf{v})_B = (f(\mathbf{v}))_{B'}$.

Observación: Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y E y E' son las respectivas bases canónicas,

$$M_{E'E}(f) = M(f).$$

Notación: Si $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ y $B' = B$, escribimos $M_B(f)$ en lugar de $M_{BB'}(f)$.

Propiedad: $\text{rg } M_{BB'}(f) = \dim \text{Im } f$; de esto se deduce que el rango de una matriz asociada a una transformación lineal no depende de las bases elegidas.

Propiedad: *Matriz de la composición:*

Sean \mathbb{U} , \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales, y sean B , B' y B'' bases de \mathbb{U} , \mathbb{V} y \mathbb{W} respectivamente.

Si $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ y $g: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ son transformaciones lineales, se tiene:

$$M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'B''}(g)M_{BB'}(f)$$

Propiedad: Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es un isomorfismo y B y B' son bases de \mathbb{V} y \mathbb{W} respectivamente,

$$M_{B'B}(f^{-1}) = (M_{BB'}(f))^{-1}.$$

Si B y B' son dos bases del espacio vectorial \mathbb{V} , llamamos *matriz de cambio de base* de B a

B' , a la matriz $C_{BB'} = M_{BB'}(id)$.

Propiedad: $C_{B'B} = (C_{BB'})^{-1}$

Propiedad: Si $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es una transformación lineal y B y B' son bases de \mathbb{V} ,

$$M_{B'}(f) = C_{BB'}M_B(f)C_{B'B}$$

o, en virtud de la propiedad anterior,

$$M_B(f) = (C_{B'B})^{-1}M_{B'}(f)C_{B'B}$$

EJERCICIOS

Ejercicio 1.- Determinar si la función f es transformación lineal.

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1)$

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2, 0, 0)$

c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}$, $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $f: \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}$, $f(A) = A^t$

Ejercicio 2.- Hallar la expresión de la transformación lineal f .

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(1,0,0) = (2,1,-1,1)$, $f(0,1,0) = (3,-1,1,0)$ y $f(0,0,1) = (0,0,4,1)$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,1,-1) = (0,3,1)$, $f(1,0,1) = (2,-1,1)$ y $f(1,1,0) = (3,2,4)$.

c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.- Decidir si existe una transformación lineal f que satisfice:

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(1,-2,0) = (3,4)$, $f(2,0,1) = (-1,1)$, $f(0,4,1) = (-7,-7)$

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(1,1,1) = (2,3,4)$, $f(0,1,1) = (1,2,1)$, $f(1,2,2) = (1,1,5)$

c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(1,1) = (2,1,1)$, $f(1,0) = (0,2,0)$, $f(5,2) = (4,8,2)$

Ejercicio 4.- Hallar una base y la dimensión de $\text{Nu } f$ y de $\text{Im } f$.

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_2 + x_3)$

b) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, 0, x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$

c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 & x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 & x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$

y sean $\mathbf{v} = (2,3)$; $\mathbb{S} = \langle (1,2,1) \rangle$; $\mathbb{T} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / 3x_1 - 2x_2 = 0 \}$.

Hallar $f(\mathbb{S})$, $f^{-1}(\mathbf{v})$ y $f^{-1}(\mathbb{T})$.

Ejercicio 6.- Calcular $\dim \text{Nu } f$ y $\dim \text{Im } f$.

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ monomorfismo

b) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ epimorfismo

c) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$

Ejercicio 7.- Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de \mathbb{V} . Sea $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ una t.l. tal que:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \quad ; \quad f(\mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \quad ; \quad f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3.$$

Determinar todos los valores de a para los cuales f no es monomorfismo. Para cada uno de ellos calcular el núcleo de f .

Ejercicio 8.- Definir una transformación lineal que verifique las condiciones enunciadas.

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu } f = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / x_1 + 2x_2 = 0 \}$, $\text{Im } f = \langle (1, 0) \rangle$

b) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nu } f = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_4 = x_2 + x_3 = 0 \}$

c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $(1, 1, 2) \in \text{Nu } f$, $\text{Im } f = \langle (1, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle$

d) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 0, 1, 3) \in \text{Nu } f$ y f es epimorfismo

e) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nu } f = \text{Im } f = \langle (2, 1, -1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$

f) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que f no es monomorfismo y $(1, 1, 1) \in \text{Im } f$

g) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nu } f = \text{Im } f$ y $f(3, 2, 1, -1) = f(-1, 2, 0, 1) \neq 0$.

Ejercicio 9.- Sean $S_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \quad ; \quad x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \}$;

$$S_2 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \} \quad ; \quad T_1 = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle \quad ; \quad T_2 = \langle (2, 1, 3), (0, 0, 1) \rangle.$$

Hallar una transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente:

$$f(S_1) \subseteq T_1 \quad ; \quad f(S_2) \subseteq T_2 \quad ; \quad \dim \text{Nu } f = 1.$$

Ejercicio 10.- Hallar $h = g \circ f$, $t = f \circ g$ y determinar el núcleo y la imagen de f , g , h y t .

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3)$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1, x_2)$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$f(0, 0, 1) = (0, -1, 1) \quad , \quad f(0, 1, 1) = (1, 0, 1) \quad , \quad f(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, x_2 - x_3, 2x_1 + x_2)$$

Ejercicio 11.- Hallar la función inversa del isomorfismo f .

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(1, 1, -1) = (1, -1, 1)$, $f(2, 0, 1) = (1, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 - x_2)$

c) $f: \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}$ $f(A) = A^t$

Ejercicio 12.- Sea $\mathbb{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_3 + x_4 = 0 \}$.

Definir una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{S} \subset \text{Nu } f \cap \text{Im } f$ y $f(1,0,1,0) = (1,0,1,0)$.

Ejercicio 13.- Sea $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la t.l. $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3, -x_1 + x_3, x_1)$.

Definir, si es posible, una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

$$f \neq 0 \quad , \quad f \circ g = 0 \quad \text{y} \quad \text{Nu } f + \text{Im } f = \mathbb{R}^4$$

Ejercicio 14.- Sean $\mathbb{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = x_1 + x_3 - x_4 = 0 \}$ y

$$\mathbb{T} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \}.$$

Definir una t. l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente $\text{Nu } f = \mathbb{S}$ y $\text{Nu } f \circ f = \mathbb{T}$.

Ejercicio 15.- Definir un proyector p tal que

a) $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{Nu } p = \langle (-1, 2) \rangle$ e $\text{Im } p = \langle (-1, 1) \rangle$.

b) $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\text{Nu } p = \langle (1, 1, -2) \rangle$. ¿Es único?

c) $p: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\text{Nu } p = \langle (1, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 3) \rangle$, $\text{Im } p = \langle (1, 2, 0, 1), (-1, 1, 4, 2) \rangle$

Ejercicio 16.- Escribir la matriz $M(f)$.

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 4x_2 - 3x_3, x_1 + x_3)$

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_1)$

c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(1,0,0) = (2,-3,1,1)$; $f(0,1,0) = (2,1,3,2)$; $f(0,0,1) = (0,-1,-2,1)$.

d) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(2,0,0) = (4,2,2)$; $f(0,4,0) = (1,1,1)$; $f(0,0,3) = (0,0,-1)$.

Ejercicio 17.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

- a) Calcular $f(1, 2, 1)$; $f(5, 7, 2)$; $f(0, 0, 1)$.
 b) Hallar bases de $\text{Nu } f$ e $\text{Im } f$.

Ejercicio 18.- En cada caso hallar $M_{BB'}(f)$.

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$

$$B = B' = E$$

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1)$

$$B = \{(-1, 0), (1, 1)\} \quad B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$$

c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$

$$B = \{(1, -1, 2), (0, 2, -1), (0, 0, 1)\} \quad B' = \{(2, 1), (1, -1)\}$$

d) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, 2x_4, x_2 + x_3)$

$$B = \{(1, -1, 2, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 0, -1)\} \quad B' = E$$

Ejercicio 19.- Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $B' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\}$ y

$B'' = \{(1, -2, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 1)\}$ bases de \mathbb{R}^3 , y sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $f(\mathbf{v}_1) = (2, -3, 2)$, $f(\mathbf{v}_2) = (0, 2, 3)$, $f(\mathbf{v}_3) = (1, 2, 0)$.

Hallar $M_{BE}(f)$, $M_{BB''}(f)$, $M_{B'E}(f)$ y $M_{B'B''}(f)$.

Ejercicio 20.- Sea $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y

$B' = \{-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2\}$ bases de \mathbb{V} . Hallar $M_{B'B}(f)$, $M_{BB'}(f)$ y $M_{B'}(f)$.

Ejercicio 21.- Sea $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la t.l. definida por $f(X) = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcular $M_E(f)$.

Ejercicio 22.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con

$B = \{(0,0,2), (0,1,-1), (2,1,0)\}$ y $B' = \{(1,0,0,0), (1,1,1,0), (1,-1,0,1), (0,1,1,1)\}$

a) Calcular $f(0,2,-1)$

b) Hallar una base de $\text{Im } f$ y una base de $\text{Nu } f$.

Ejercicio 23.- Sea $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un proyector que no es idénticamente nulo y es distinto de la identidad. Probar que existe una base B de \mathbb{R}^2 tal que $M_B(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 24.- Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que la matriz de f en las bases

$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular: $f(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3)$; $f(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4)$

b) Dar bases de $\text{Nu } f$ e $\text{Im } f$.

c) Calcular $f^{-1}(\mathbf{w}_1)$

Ejercicio 25.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ con

$B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ y $B' = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$.

Hallar todos los valores de a para los cuales $f(1,2,1) = (0,1,-6)$.

Ejercicio 26.-

a) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} k & 2 & 4 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$.

Encontrar todos los valores de k para los cuales f no es un monomorfismo.

b) Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de \mathbb{R}^3 , y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & a & -3 \end{pmatrix}. \text{ Hallar todos los valores de } a \text{ tales que } f \text{ es isomorfismo.}$$

Ejercicio 27.- Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de \mathbb{R}^3 , y sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal

$$\text{tal que } M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $2a^2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3a\mathbf{v}_3 \in \text{Im } f$.

Ejercicio 28.- Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ bases de \mathbb{R}^3 .

$$\text{Sea } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Hallar } M_{B'B}(f) \text{ y } M_{BB'}(f).$$

$$\text{Ejercicio 29.- Sea } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

con $B = \{(1,1,1), (0,1,-1), (0,0,-1)\}$ y $B' = \{(1,-1,0), (0,0,1), (0,1,2)\}$.

Si $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$, hallar un subespacio T de \mathbb{R}^3 tal que $\mathbb{R}^3 = T \oplus f(S)$.

Ejercicio 30.- Sean $B = \{(1,-1), (1,2)\}$, $B' = \{(1,1,-1), (1,-1,0), (-1,0,0)\}$ y las

transformaciones lineales $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ tal que } M_{B'E}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ tal que } M_{BB'}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar $M(f \circ f)$, $M_{BE}(g \circ h)$ y $M_{B'B}(f \circ g)$.

Ejercicio 31.- Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $f \circ f(3\mathbf{v}_1)$, $f \circ f(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2)$ y $f \circ f(\mathbf{v}_3)$

b) Hallar $\dim \text{Nu}(f \circ f)$ y $\dim \text{Im}(f \circ f)$ y dar una base de cada uno.

Ejercicio 32.- Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de \mathbb{V} y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ base de \mathbb{W} .

Sean $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ y $g: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ t.l. tales que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $g \circ f(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3)$.

b) Hallar una base de $\text{Nu}(g \circ f)$ y una base de $\text{Im}(g \circ f)$.

Ejercicio 33.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la t.l. dada por $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)$.

a) Hallar $M(f^{-1})$

b) Hallar $M_{B'B}(f^{-1})$ con $B = \{(1,1), (2,1)\}$ y $B' = \{(-1,2), (0,1)\}$.

Ejercicio 34.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y sea

$B = \{(1,0,2), (0,1,1), (2,1,0)\}$. Hallar $M_{BE}(f)$, $M_B(f)$ y $M_{BE}(f^{-1})$.

Ejercicio 35.- Sean $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $g: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que

$M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ bases de \mathbb{V} .

Hallar $M_{BB'}(g \circ f)$, $M_{B'B}(g \circ f)$ y $M_{BB'}(g^{-1})$.

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Definir una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

$$\text{i) } \text{Nu } f \cap \text{Im } f = \langle (1,1,1,1) \rangle \quad \text{ii) } (1,5,1,0) \in \text{Im } f \quad \text{iii) } (3,1,2,2) \notin \text{Im } f + \text{Nu } f.$$

2. Sean \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 subespacios de \mathbb{R}^3 tales que $\dim \mathbb{S}_1 = 1$, $\dim \mathbb{S}_2 = 2$ y $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2 = \mathbb{R}^3$.

Demostrar que si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una t.l. tal que $f(\mathbb{S}_1) = \mathbb{S}_1$ y $f(\mathbb{S}_2) = \mathbb{S}_2$ y $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

es una base de \mathbb{R}^3 tal que $\{\mathbf{v}_1\}$ es base de \mathbb{S}_1 y $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es base de \mathbb{S}_2 , entonces

$$M_{\mathbf{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \text{ con } a \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una t.l. que satisface:

$$f \circ f = 0 \quad ; \quad f(1,0,0,0) = (1,2,2,-1) \quad ; \quad f(0,1,0,0) = (0,-1,1,0).$$

Calcular $M(f)$.

4. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & k \\ -8 & k & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\text{Nu } f \neq \{0\}$ y $\text{Nu } f \subseteq \text{Im } f$.

5. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_1 - 3x_3 + x_4 = 0\}$ y

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 - x_4 = 0\}.$$

Hallar una transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

$$f(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S} \quad ; \quad \text{Im } f = \mathbb{H} \quad ; \quad \text{Nu}(f \circ f) = \mathbb{S}.$$

6. Sean en \mathbb{R}^4 los subespacios $\mathbb{S} = \langle (1,2,-1,2) \rangle$, $\mathbb{W} = \langle (0,2,3,2); (1,-1,1,2) \rangle$ y

$$\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Definir, si es posible, un isomorfismo $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que satisfaga simultáneamente:

$$f(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = \mathbb{S} + \mathbb{W} \quad ; \quad f(\mathbb{S}) \cap \mathbb{S} = \{0\} \quad ; \quad f(\mathbb{S}) \cap \mathbb{W} = \{0\}.$$

7. Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_3, -x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + x_4, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3)$.

Definir, si es posible, una transformación lineal $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente: $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im } f$ y $g \circ f = 0$.

8. Sea $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la t.l. dada por $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar una base B_1 para $\text{Nu } f$ y encontrar un conjunto B_2 de vectores de \mathbb{R}^5 tal que $B = B_1 \cup B_2$ es una base de \mathbb{R}^5 .

b) Probar que los transformados de los vectores de B_2 por f , son linealmente independientes y extender este conjunto a una base B' de \mathbb{R}^4 .

c) Calcular $M_{BB'}(f)$.

9. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle (2, 0, 1, 1); (1, 1, 1, 1); (1, 2, 0, 1) \rangle$

Definir, si es posible, una t. l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente

$$f(\mathbb{S}) = f(\mathbb{T}) \text{ y } \dim(\text{Nu } f) = 1.$$

10. Sean en \mathbb{R}^4 los subespacios $\mathbb{W} = \langle (1, 0, -1, 1); (1, 1, 0, -1) \rangle$ y

$\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$ y sea en \mathbb{R}^3 el subespacio $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$.

Definir, si es posible, una transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga

simultáneamente: $f(\mathbb{H}) = \mathbb{S}$; $f(\mathbb{W}) = \mathbb{S}^\perp$; $f(1, 1, -1, 1) = (2, -2, -3)$.

11. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la t.l. dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 - x_4).$$

Definir, si es posible, una t.l. $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nu}(f \circ g) = \langle (-1, 0, 2) \rangle$ e $\text{Im } g = \mathbb{S}$.

12. Sean $B = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}$ y $B' = \{(0, 0, 1); (0, 1, 1); (1, 1, 1)\}$ bases de \mathbb{R}^3 y sea

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Calcular $f^{-1}(2, 2, 5)$.

13. Sea $B = \{(1,1,0,0);(0,1,1,0);(1,0,0,1);(0,0,0,1)\}$ y sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una

transformación lineal tal que $M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Determinar a y b si se sabe que $f(2,3,1,-1) = (2,1,2,4)$ y $\dim(\text{Nu } f) = 1$.

14. Sean $B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. \mathbb{V} ;

$f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

Determinar $a \in \mathbb{R}$ tal que $\dim(\text{Im } f) = 2$, y para el a hallado decidir si $\mathbf{v} \in \text{Im } f$.

15. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, con

$B = \{(1,1,1);(0,1,-1);(0,0,-1)\}$ y $B' = \{(1,-1,0);(0,0,1);\mathbf{v}\}$ bases de \mathbb{R}^3 .

Hallar \mathbf{v} para que $f(0,0,-1) = (2,-3,-2)$. Dar una base de $f(\mathbb{S})$, si $\mathbb{S} = \langle (-1,1,0) \rangle$.

16. Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - 4x_2 + x_3, 2x_2 - x_3)$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

la t.l. tal que $M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, con $B = \{(0,0,-1);(1,-1,2);(0,1,3)\}$.

Calcular $f \circ g(3,-1,-3)$.

17. Sean $B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{-\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$ bases de un e.v. \mathbb{V} y sea

$f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ la t.l. tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar una base de $\text{Im}(f \circ f)$.

18. Sean $B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. \mathbb{V} y

$$f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \text{ la transformación lineal tal que } M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar, si es posible, una base B'' de \mathbb{V} tal que $M_{B''}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_4, 2x_1 + x_2 + x_3)$.

Hallar una t.l. $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, no nula, que satisfaga simultáneamente:

$$f \circ g = 0 \quad \text{y} \quad g \circ f = 0.$$

20. Definir una transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

i) $\text{Nu } f + \text{Im } f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 3x_1 - x_4 = 0\}$

ii) $\dim \text{Im } f = \dim \text{Nu } f$

iii) $f(1, 2, 0, 1) = 2f(1, 0, 1, 2) = -2f(0, 0, 0, 1)$

21. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / -x_1 + x_2 + 2x_4 = x_2 + x_3 + 3x_4 = 0\}$; $\mathbb{S}' = \langle (1, 5, 2, 1), (0, 2, 2, 2) \rangle$;

$$\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 = 0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{T}' = \langle (1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0) \rangle.$$

Definir una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

i) $f(\mathbb{S}) \subseteq \mathbb{T}$

ii) $f(\mathbb{S}') \subseteq \mathbb{T}'$

iii) $\dim f(\mathbb{S} + \mathbb{S}') = \dim(\mathbb{S} + \mathbb{S}')$

22. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_1, x_2 + x_3, x_2)$ y sean

$$\mathbb{S} = \langle (1, 0, 1); (0, -1, 1) \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (1, 3, -1).$$

Definir una t.l. $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h = g \circ f$ satisfaga $h(\mathbf{v}) \in \mathbb{S}$ y $\dim(\text{Nu } h) = 1$.

23. Sea $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la t.l. $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 3x_2 - x_3)$

Definir un proyector $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ p = 0$.

24. Sea $B = \{(2, 1, -1); \mathbf{v}; \mathbf{w}\}$ base de \mathbb{R}^3 y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_{EB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar \mathbf{v} y \mathbf{w} si se sabe que $f(6, -3, 1) = (1, 2, 1)$ y $f(5, -2, 1) = (1, -1, 0)$.

25. Sea $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 = 0\}$. Sea $B = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}$ y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 + a^2 & -8 + a^2 & -8 \\ a - 1 & a - 1 & a \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de a para los cuales $\{f(0, 1, 2); f(-1, 0, 4)\}$ es base de \mathbb{S} .

26. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 , $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ y $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Hallar la dimensión y una base de } f(\mathbb{S}) \cap \text{Nu } f.$$

27. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & k \\ -8 & k & 2 \end{pmatrix}$. Determinar todos los valores de k para los

cuales es $\text{Nu } f \neq \{0\}$ y $\text{Nu } f \subseteq \text{Im } f$.

28. Sean $B = \{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (0, 0, 1)\}$ y f y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + x_2, x_2 - x_3) \text{ y } M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Hallar } (f \circ g)^{-1} \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

29. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t. l. tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hallar, si es posible, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ y a, b, c reales tales que $B = \{\mathbf{v}; \mathbf{w}; (a, b, c)\}$ sea una base

de \mathbb{R}^3 y $M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} 5 & a & 0 \\ 5 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$.

30. Sean $B = \{(0, 1, -1); (1, 0, 0); (1, 1, 0)\}$, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$. Decidir si $f \circ f(9, 7, 2) \in \mathbb{S}$.

31. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ bases de \mathbb{R}^3 , y f y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales

que $M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular $M_{B'}(f \circ g)$.

32. Sean $\mathbb{S} = \langle (-1, 1, -1); (2, 1, 1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$.

Definir un isomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(\mathbb{S}) = \mathbb{T}$; $f(\mathbb{T}) = \mathbb{S}$ y exista un vector

$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tal que $f^{-1}(\mathbf{w}) = \frac{1}{3}\mathbf{w}$.

33. Definir una transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

$(1, -1, 0, 1) \in \text{Nu } f$ y $\text{Nu}(f \circ f) = \text{Im}(f \circ f)$.